6

KOMPOZİT TABAKADA ELASTİK MALZEME ÖZELLİKLERİNİN TEORİK HESAPLANMASI

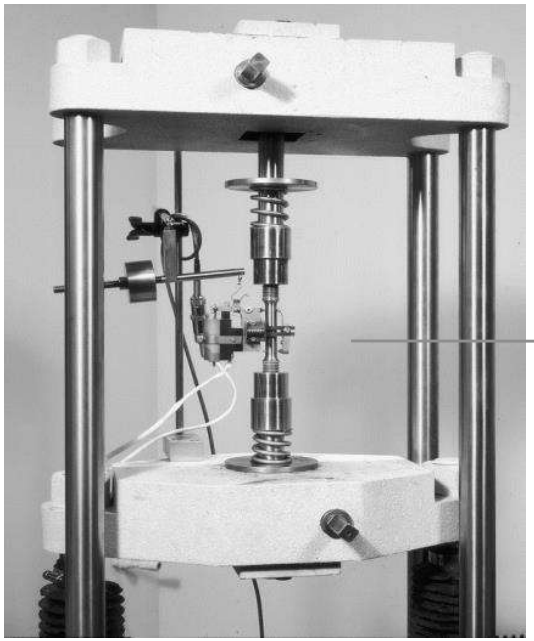
(Theoritical Calculations of Elastic Material Properties of a composite lamina)

- **Bu bölümde amacımız;** Kompoziti oluşturan izotropik bileşenlerin (matris ve fiberin) herbirisinin elastik mekanik özellikleri (E, ν, G) ve termal genleşme katsayıları (α) belli iken, kompozitin bu özelliklerini teorik olarak hesaplamaktır.
- Burada kompozitin ortoropik özelliğe sahip bir tabaka olduğu kabul edilecektir.
- Hesaplamalar en küçük seviyede bir temsili hacim elemanına göre yapılacağı için, bu konuya kompozit malzemelerin mikromekaniği olarak da isim verilmektedir.

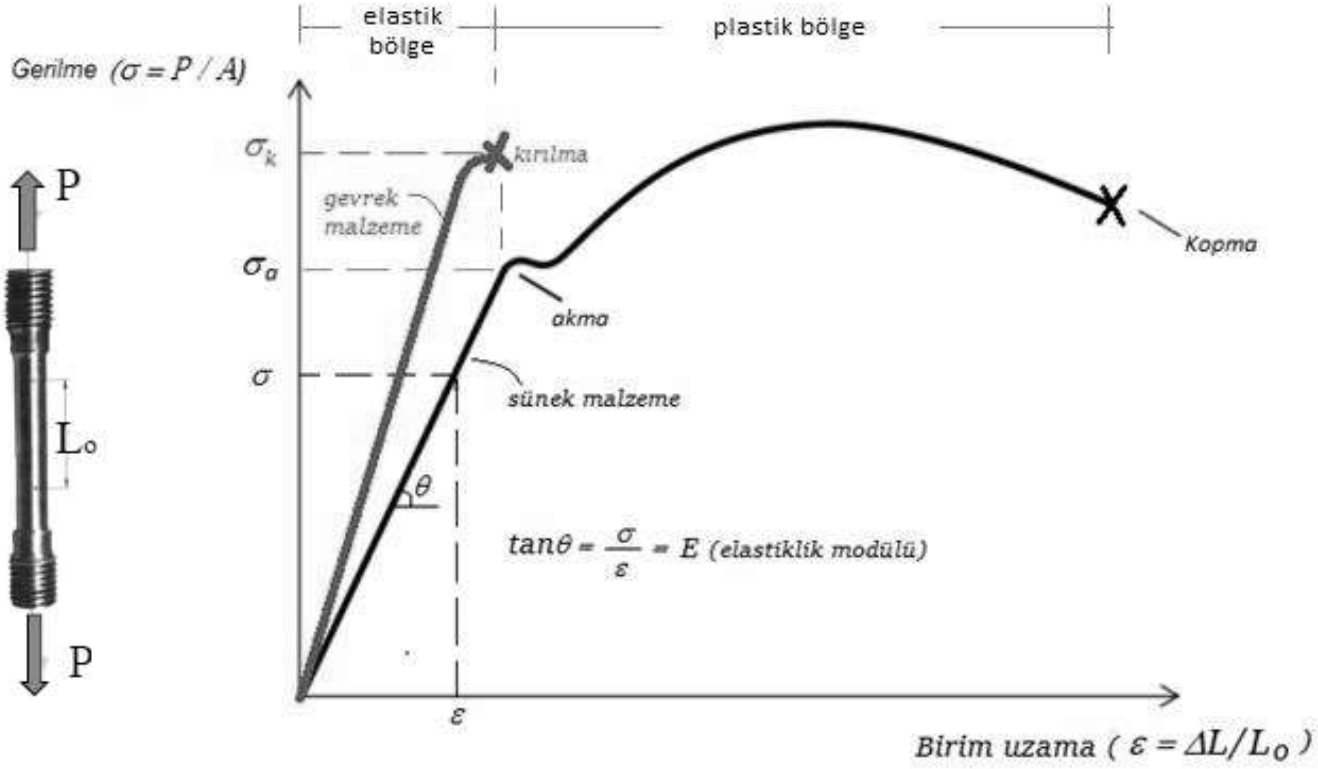
6.1 İZOTROPİK BİR MALZEMENİN ELASTİK ÖZELLİKLERİNİ ÖNCE HATIRLAYALIM:

6.1.1 Elastiklik (Young) Modülü (E)

İzotropik malzemelerin (örn: çelik, alüminyum vb.) çekme testini hatırlayalım:

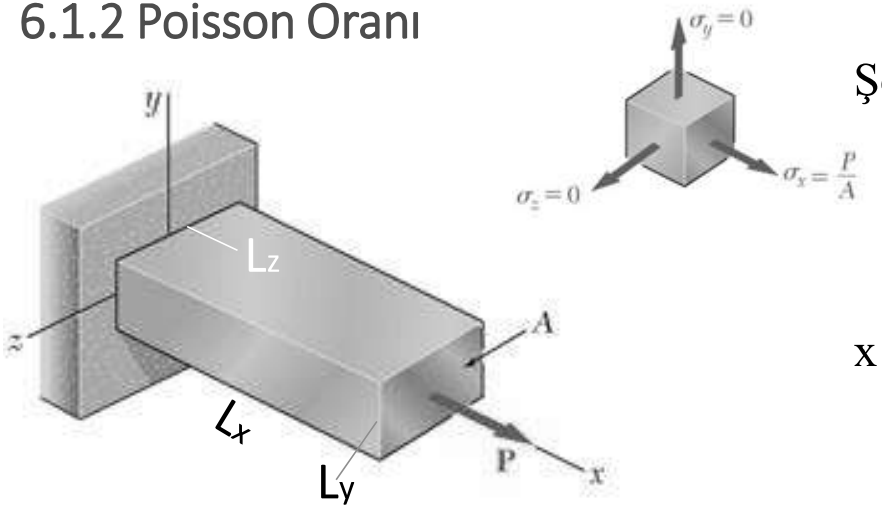


Çekme Test Cihazı



Akma sınırına kadar olan kısım (elastik bölge), doğrusal (lineer) ise bu tip malzemelere lineer elastik malzemeler deriz. Bu doğrusal kısmın eğimi Elastiklik modülü (E) olarak isimlendirilir.

6.1.2 Poisson Oranı

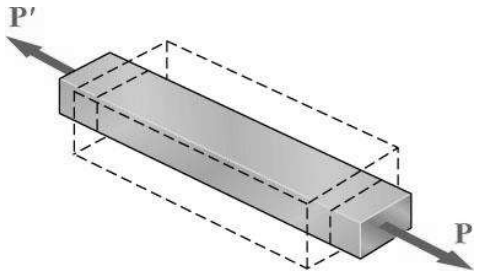


Şekildeki çubuk eksenel P yüküne maruz kalırsa birim uzama:

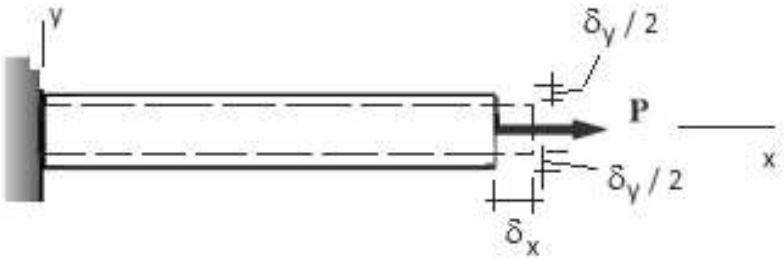
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$ (tek eksenli yüklemede Hooke bağıntısı)

x doğrultusundaki eksenel P yükü y ve z doğrultularında gerilme oluşturmaz ancak bu doğrultularda daralmaya sebep olur. Bu sebeple;

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z$$



Poisson oranı: $$\nu = \left| \frac{\text{yanal birim uzama}}{\text{eksenel birim uzama}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$



Dikkat: Bu formül tek eksenli yükleme durumunda geçerlidir. P nin yanısıra Y veya Z doğrultularında da kuvvetler olsaydı bu formül kullanılamazdı.

Poisson oranı bir yükün diğer doğrultulardaki şekil değiştirme etkisini verir.

Poisson oranı bir malzeme özelliğidir ve sınırları: 0 ile 0.5 arasında değişir.

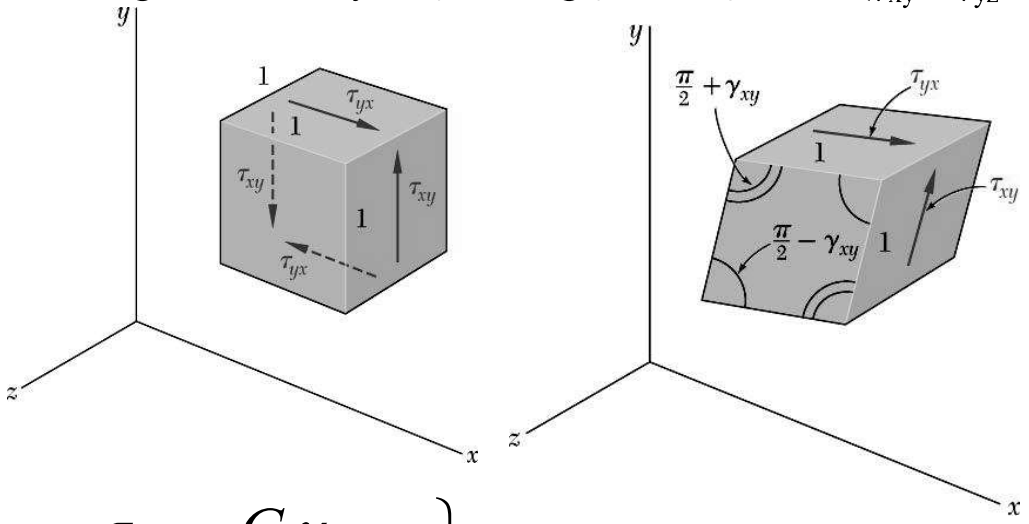
Unutmayın: Aynı zamanda
Birim uzama = Toplam uzama/ o yöndeki ilk boydur.
Bu tanım tüm elastik yükleme durumları için geçerlidir.

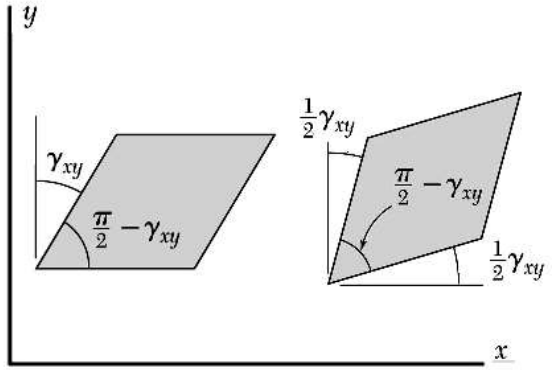
→ $\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}$ $\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{L_y}$ $\varepsilon_z = \frac{\delta_z}{L_z}$

6.1.3 Rijtlik (Kayma) Modülü (G)

Bir noktada, en genel durumda 3 farklı kayma gerilmesi $(\tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{xz})$ olabilir.

Bu gerilmeler kayma şekil değiştirme açılarına $(\gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz})$ sebep olurlar.





τ ile γ arasındaki Hooke bağıntısı:

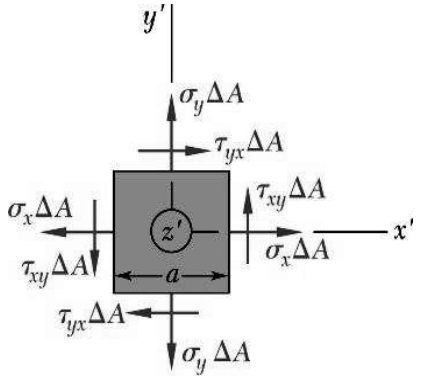
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Kaymada Hooke Bağıntıları

G: kayma modülü (malzeme özelliği)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

2- Boyutlu bir gerilme elemanında *z*-eksenine göre moment alınırsa :



$$\sum M_z = 0 = (\tau_{xy}\Delta A)a - (\tau_{yx}\Delta A)a \longrightarrow$$

Böylece bir noktadaki genel gerilme durumu **6** gerilme elemanı (bileşen) ile temsil edilebilir.

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ benzer şekilde; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

İndisler: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Düzlem normali — Gerilme doğrultusu

6.2 KOMPOZİT BİR TABAKADA ELASTİK MEKANİK ÖZELLİKLERİN TEORİK HESAPLANMASI

Kompozit bileşenlerinin özellikleri:

In other words when the properties of fiber and matrix shown below;

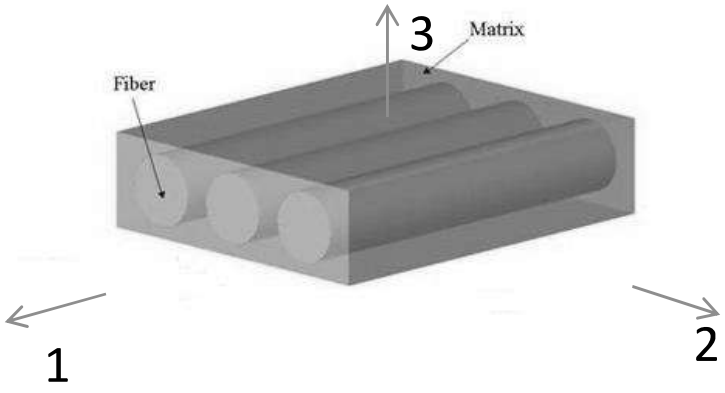
E_f: Elyaf (Fiber) malzemesinin elastiklik modülü(modulus of elasticity of fiber),

E_m: Matris malzemesinin elastiklik modülü,

ϑ_f: Fiber malzemesinin poisson oranı,

ϑ_m: Matris malzemesinin poisson oranı,

V_f: Fiber Hacimsel konsantrasyon oranı (fiber volume friction)



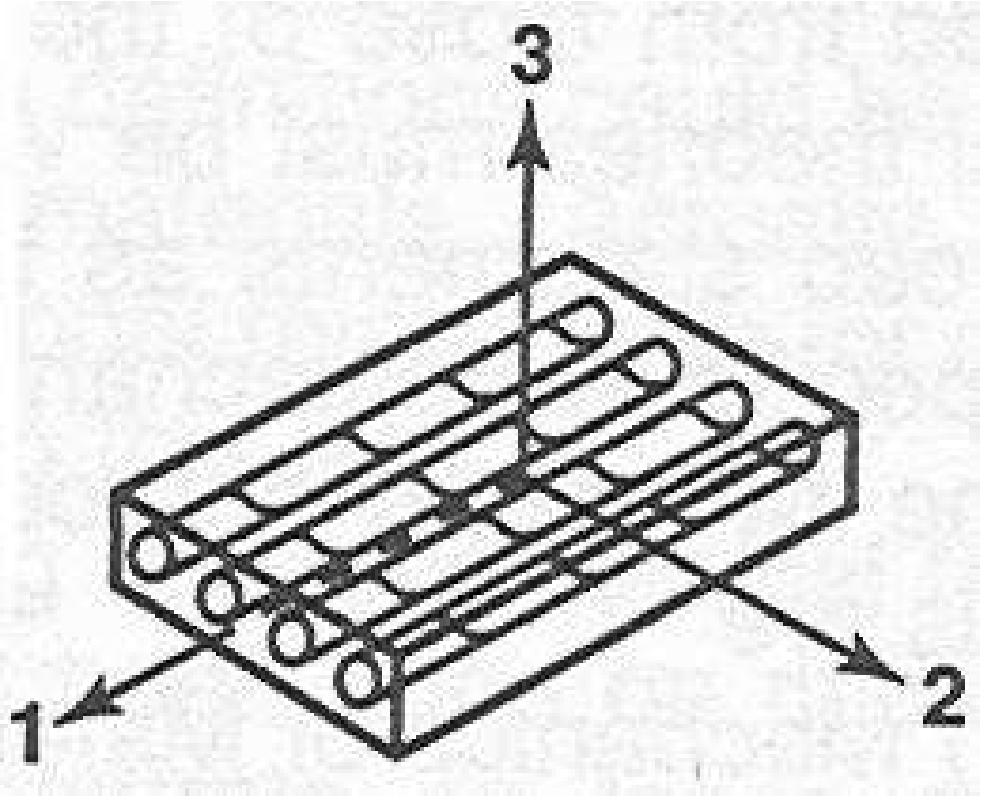
Tüm bu özellikler belli olduğunu düşünüyoruz ve kompozit bir tabakanın

$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$ değerlerini teorik olarak hesaplamayı hedefliyoruz.

we can determine the properties E_1, E_2, G_{12}, ν_{12} of a composite lamina

Kompozit Malzeme Mekaniği Ders Notları Prof.Dr.Mehmet Zor

6.3 Ortotropik Tabaka (Lamina)da Asal Eksenler
(Principal Axes on an orthotropic composite lamina)



1: Hem tabaka düzlemine hem de elyaf doğrultusuna paralel eksen,(along the fiber axis)

2: Tabaka düzlemine paralel fakat elyaf doğrultusuna dik eksen, (paralel to the plane of the lamina but perpendicular the fiber axis),

3: Hem tabaka düzlemine hem de elyaf doğrultusuna dik eksen.. (perpendicular to the plane of lamina and fiber axis)

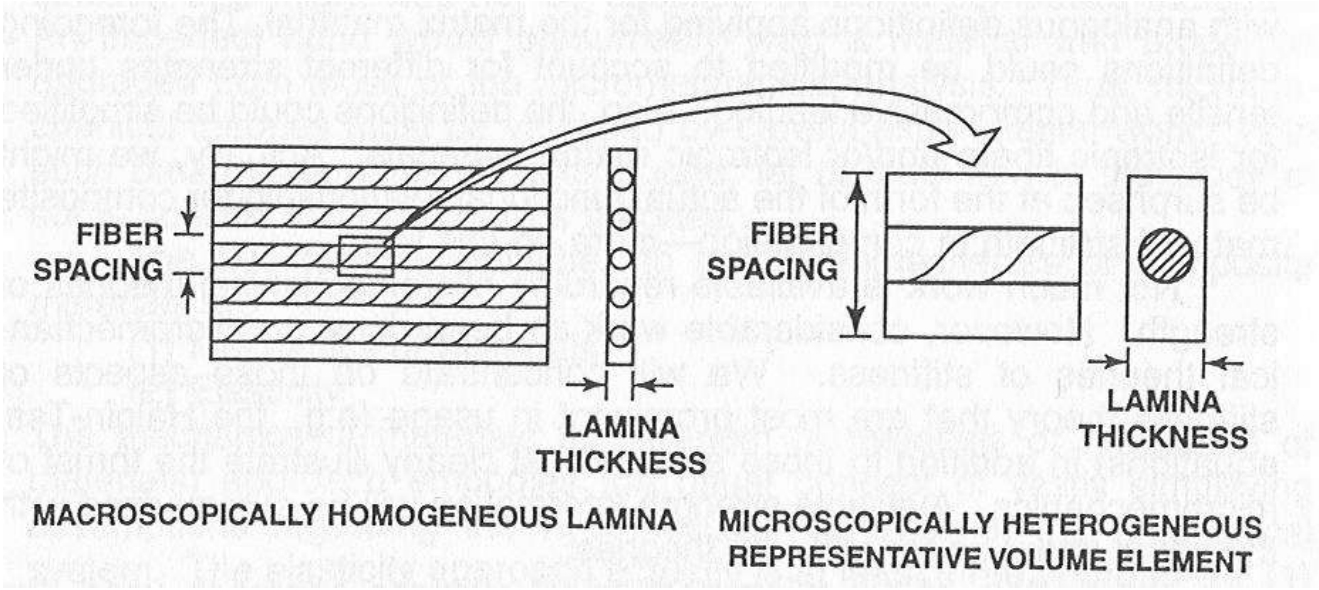
6.4 Ortotropik Tabaka (Lamina)da Temsili Hacim Elemanı

Representative volume element on orthotropic composite lamina

- Hesaplamalarda, tek yönlü elyaf takviyeli kompozit levhadan çıkarılmış **temsili hacim elemanı** kullanılacaktır. Bu eleman o şekilde seçilmelidir ki, kompozit levhayı minimum seviyede temsil etsin. Mikro seviyede bir temsili eleman incelendiği için bu 6.konu «kompozit malzemelerin mikromekaniği» olarakta isimlendirilmektedir.

(Representative volume plane is the minimum part of the lamina. Its mechanical properties are the same of lamina. At the calculations, we will use repres. volume plane obtained from an unidirectional fiber reinforced composite lamina)

- Elemanter mukavemet denklemleri ile kompozitin mekanik özellikleri belirlenecektir. *(we will use the equations used on the elementary strengt of materials for calculations.)*



6.5 Ortotropik Tabaka (Lamina)da Kuvvet Paylaşımı

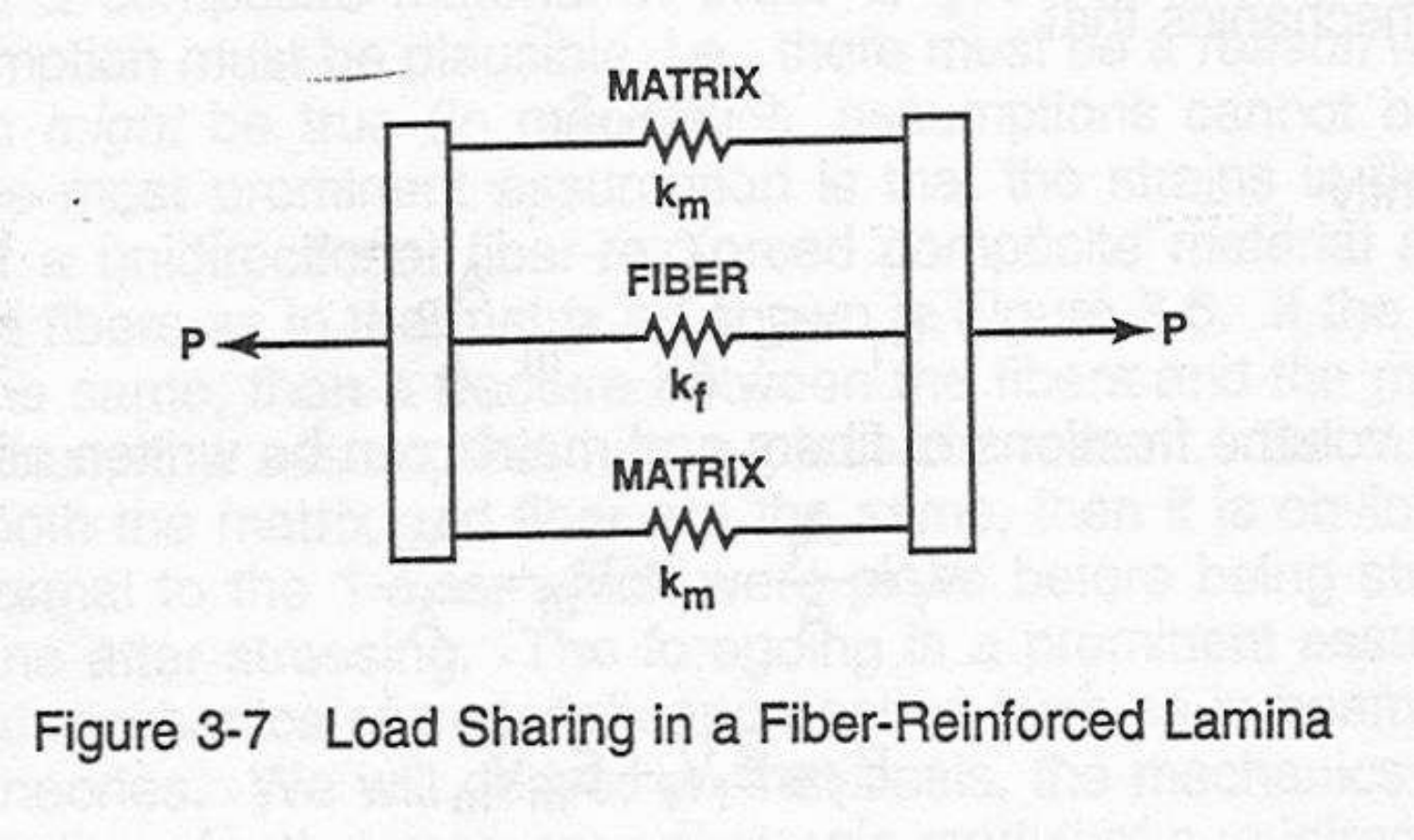
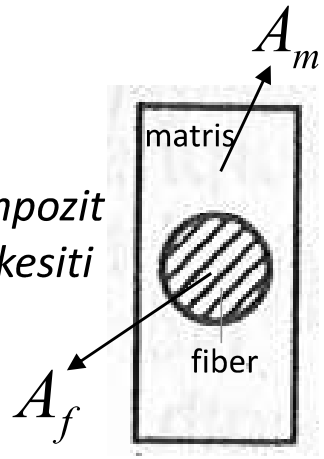


Figure 3-7 Load Sharing in a Fiber-Reinforced Lamina

Fiber doğrultusundaki yük matris ve fiber tarafından karşılanır. Fiber yüzdesine bağlı olarak fiberlere ve matrise düşen yük oranı değişiklik gösterir.

6.6 FİBER VE MATRİS HACİM ORANLARI ARASINDAKİ BAĞINTI

(The relation between volume fractions of fiber and matrix)



Kompozit dik kesiti

$$A = A_f + A_m \rightarrow \quad AL = A_f L + A_m L \quad \rightarrow \frac{AL}{AL} = \frac{A_f L}{AL} + \frac{A_m L}{AL}$$

$$\rightarrow \quad 1 = \frac{A_f}{A} + \frac{A_m}{A} \qquad \rightarrow 1 = V_f + V_m \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{V_m = 1 - V_f}$$

Fiber hacimsel oranı — *Matris hacimsel oranı*

A : Kompozitin elyafa dik kesit alanı

A_f : Elyaf kesit alanı

A_m : Matris kesit alanı

Cross sectional areas

AL : Kompozitin hacmi — : Volume of composite

$A_f L$: Elyaf hacmi — : Volume of fiber

$A_m L$: Matris hacmi — : Volume of matrix

6.6.1 Kompozit Yoğunluğunun Teorik Hesabı:

$$\boldsymbol{\rho = \rho_f V_f + \rho_m V_m}$$

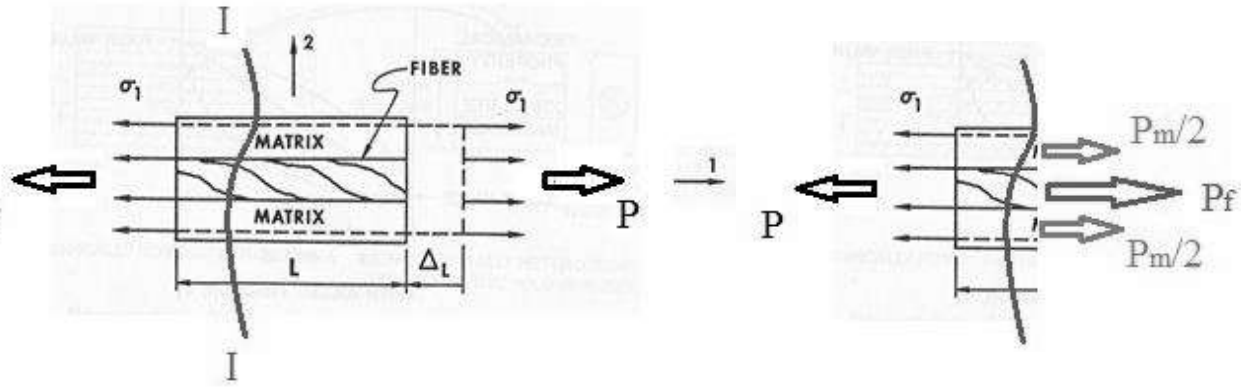
6.7 E1 Teorik HESABI :(fiber doğrultusunda Elastiklik modülü teorik hesabı)

Theorical Calculation of E_2

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1$$

$$\sigma_f = E_f.\varepsilon_f = E_f.\varepsilon_1$$
$$\sigma_m = E_m.\varepsilon_m = E_m.\varepsilon_1$$
$$\sigma_1 = E_1.\varepsilon_1$$



$$\left.\begin{aligned} P &= \sigma_1 A \\ P_f &= \sigma_f A_f \\ P_m &= \sigma_m A_m \end{aligned}\right\rangle \quad P = P_f + P_m \;\rightarrow\; \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \;\rightarrow\; E_1.\varepsilon_1 A = E_f \varepsilon_f A_f + E_m \varepsilon_m A_m$$

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A}$$

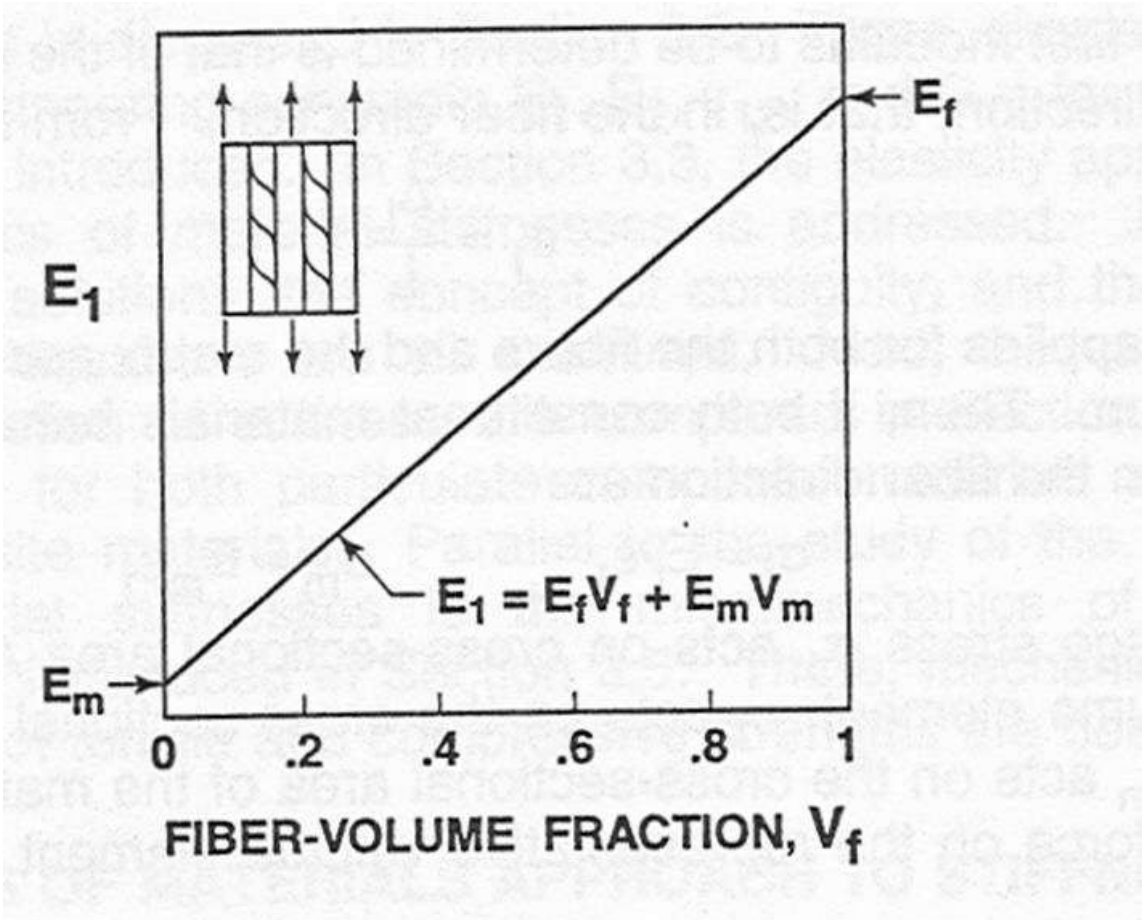
(Fiber volume fraction)

$$fiber\ hacim\ oranı:\ V_f = \frac{Fiber\ hacmi}{Kompozit\ Hacmi} = \frac{A_f.L}{A.L} = \frac{A_f}{A}$$

$$matris\ hacim\ oranı:\ V_m = \frac{Matris\ hacmi}{Kompozit\ Hacmi} = \frac{A_m.L}{A.L} = \frac{A_m}{A}$$

$$\boxed{E_1 = E_f V_f + E_m V_m}$$

Fiber Oranının E1 Değerine Etkisi



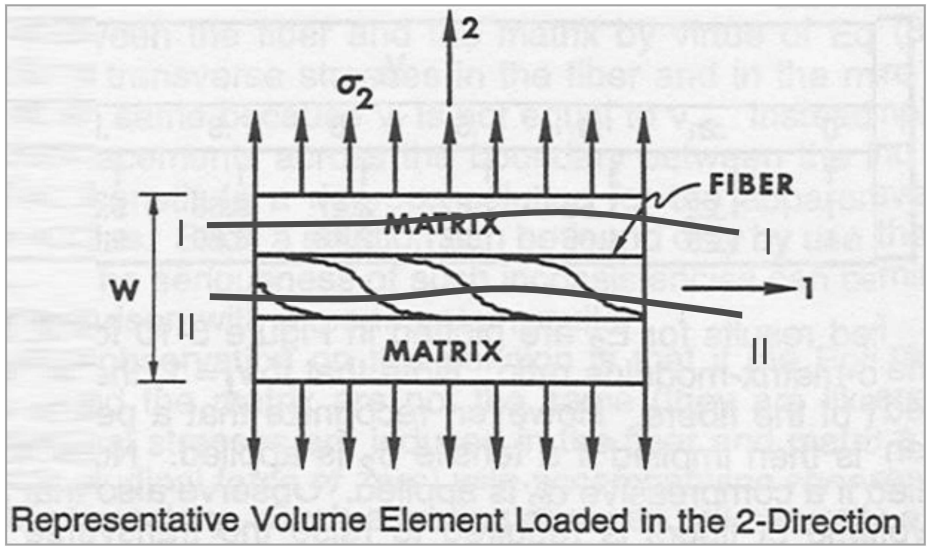
Variation of E_1 with Fiber-Volume Fraction

6.8 E_2 teorik HESABI (fiberlere dik doğrultuda Elastik Modülünün teorik hesabı)

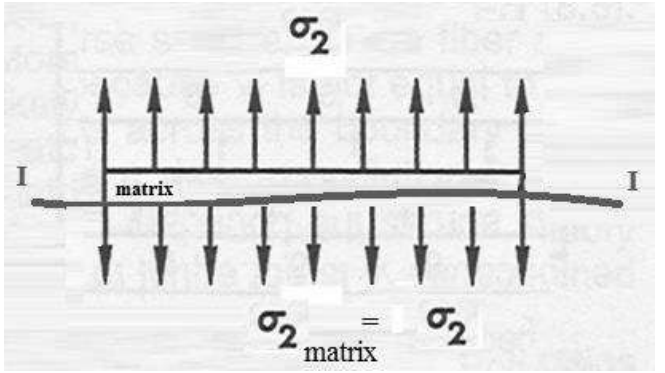
Theorical Calculation of E_2

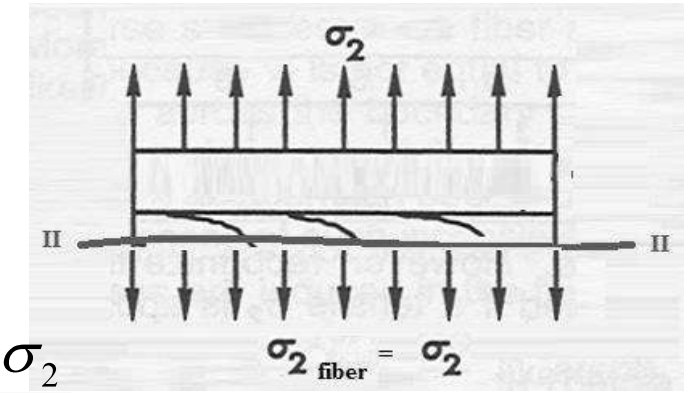
Temsili hacim elemanı 2 yönünde yüklenirse, matris ve fiberde oluşan gerilmeler aynıdır.

Stresses along to the axis 2 ($\sigma 2$) are same for matrix, fiber and composite.

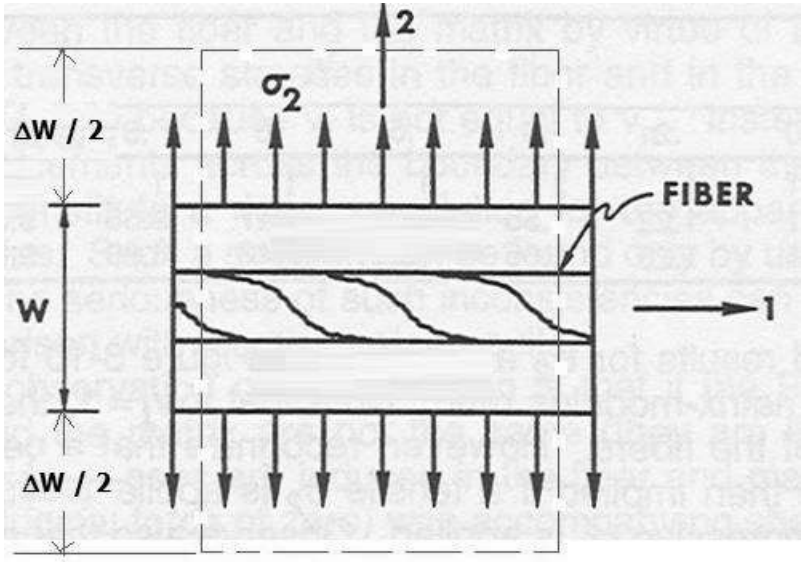


Representative Volume Element Loaded in the 2-Direction





$$\sigma_f = \sigma_m = \sigma_2 \longrightarrow \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad \varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m}$$



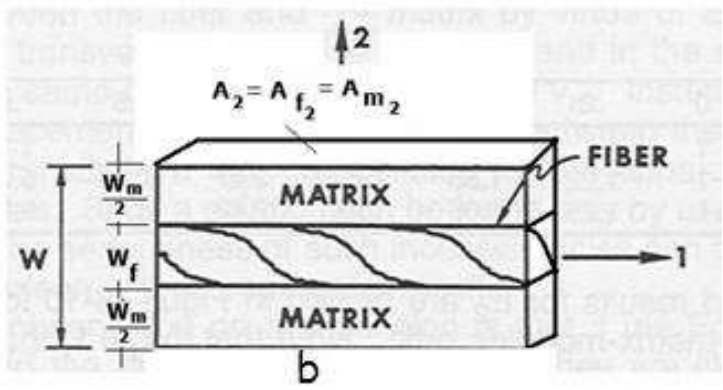
2 doğrultusundaki toplam uzama

(displacement along to the direction 2)

$$\Delta W = \Delta W_f + \Delta W_m$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta W &= \varepsilon_2 W \\ \Delta W_f &= \varepsilon_f W_f \\ \Delta W_m &= \varepsilon_m W_m \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon_2 W = \varepsilon_f W_f + \varepsilon_m W_m$$

$$\varepsilon_2 \frac{W}{W} = \varepsilon_f \frac{W_f}{W} + \varepsilon_m \frac{W_m}{W},$$

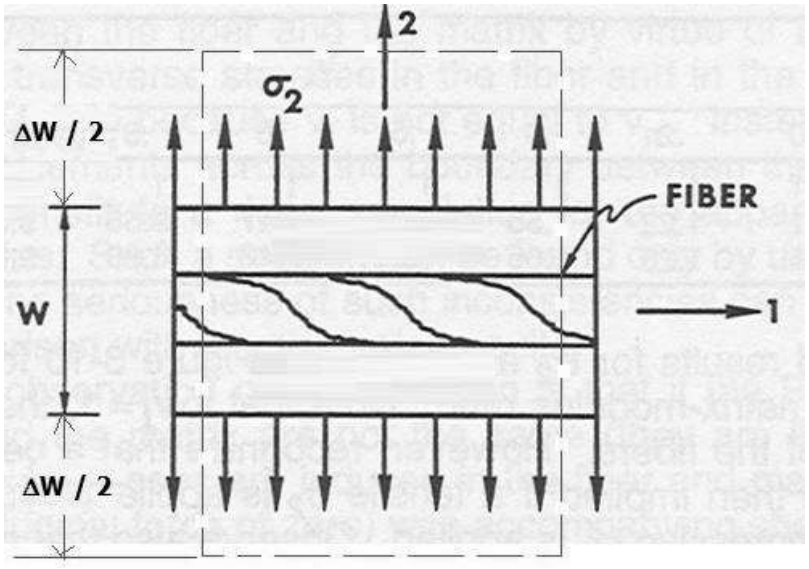


$$\frac{W_f.A_{f2}}{W.A_2} = \frac{Fiber\ \ hacmi}{Kompozit\ \ hacmi} = \frac{W_f}{W} = V_f : fiber\ hacimsel\ oranı$$

$$\frac{W_m.A_{m2}}{W.A_2} = \frac{Matris\ \ hacmi}{Kompozit\ \ hacmi} = \frac{W_m}{W} = V_m : Matris\ hacimsel\ oranı$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f . V_f + \varepsilon_m . V_m$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f . V_f + \varepsilon_m . V_m$$

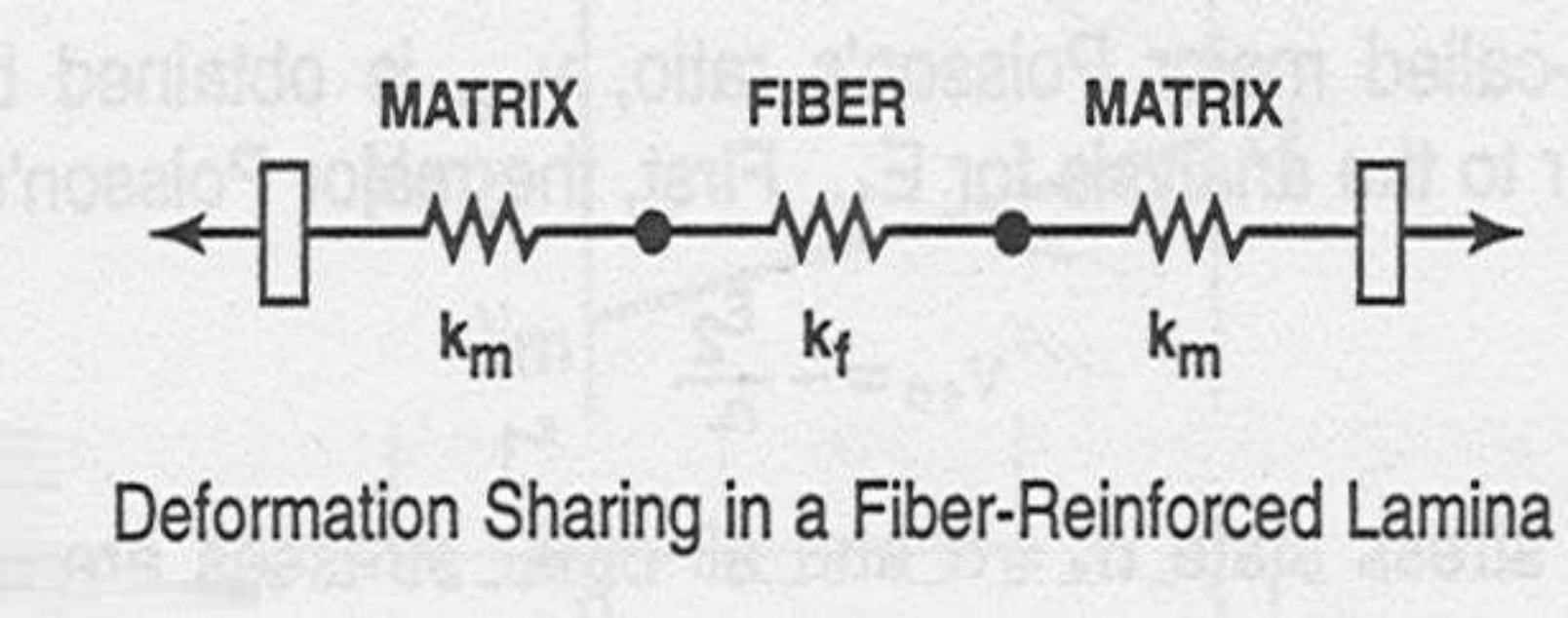


$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f},\ \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \qquad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 = V_f \frac{\sigma_2}{E_f} + V_m \frac{\sigma_2}{E_m}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} = \frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}$$

Elyaf-Takviyeli bir tabaka (Lamina) da 2 yönünde Deformasyon Paylaşımı



Deformation Sharing in a Fiber-Reinforced Lamina

Fiber oranının E_2 üzerindeki etkisi

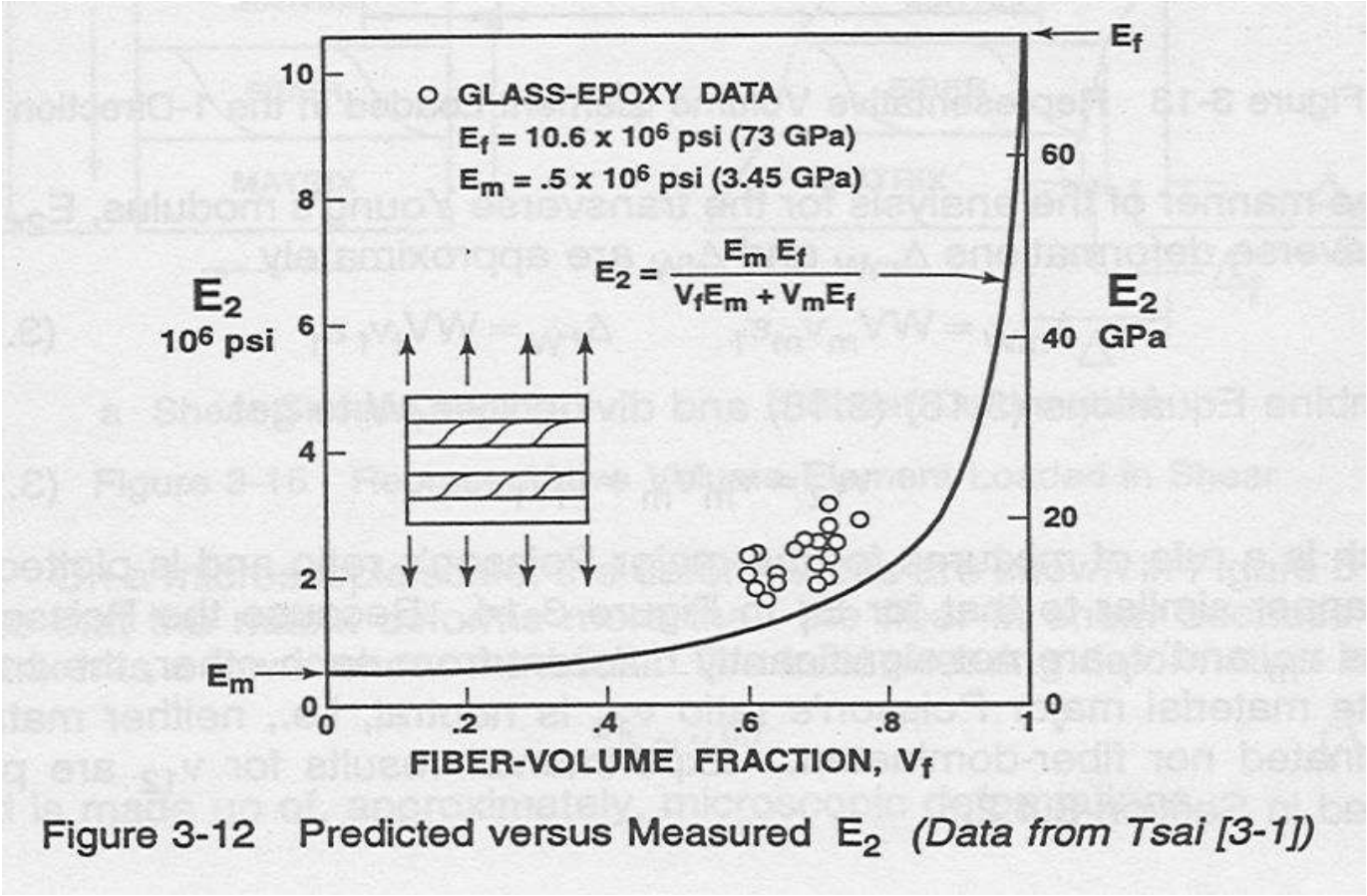
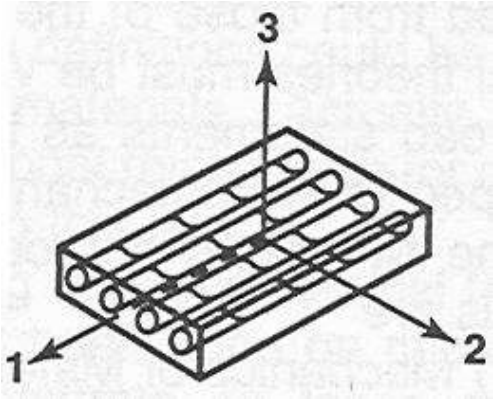


Figure 3-12 Predicted versus Measured E_2 *(Data from Tsai [3-1])*

6.9 Tabakalı Kompozitlerde Poisson Oranları ve Teorik Hesapları:

Ortotropik karekter gösteren bir tabaka için genel olarak poisson oranı ifadesi:



$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$$

ν_{ij} nin açık ifadesi:
Sadece i doğrultusunda çekme yapıldığında,
j dik doğrultusunda oluşan birim daralma (ε_j) nın çekme doğrultusundaki birim uzama (ε_i) ya oranının negatifidir.

Buna göre:

Major (büyük) Poisson oranı: $\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ *Sadece lifler (1) doğrultusunda çekme yapıldığında, liflere dik (2) doğrultusundaki birim daralmanın 1 doğrusundaki birim uzamaya oranıdır.*

Minor (küçük) Poisson oranı: $\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ *Sadece liflere dik (2) doğrultusunda çekme yapıldığında, lifler (1) doğrultusundaki birim daralmanın 2 doğrusundaki birim uzamaya oranıdır.*

Transverse (enine, çapraz) Poisson oranı: $\nu_{23} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$ *Sadece liflere dik (2) doğrultusunda çekme yapıldığında, tabaka kalınlığı (3) doğrultusundaki birim daralmanın 2 doğrusundaki birim uzamaya oranıdır.*

Bunlardan farklı olarak ν_{13}, ν_{32}, ν_{31} şeklinde poisson oranları da vardır.

Genel olarak poisson oranları ve Elastiklik modüller arasında şu şekilde bir ilişki de mevcuttur:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$$

Unutmayın: Poisson oranı sıfırdan küçük (negatif) olamaz. İzotropik malzemelerde aynı zamanda 0.5 den büyük olamaz.

6.9.1 ν_{12} teorik HESABI (Major poisson oranı teorik hesabı)

Theoritical calculation of ν_{12}

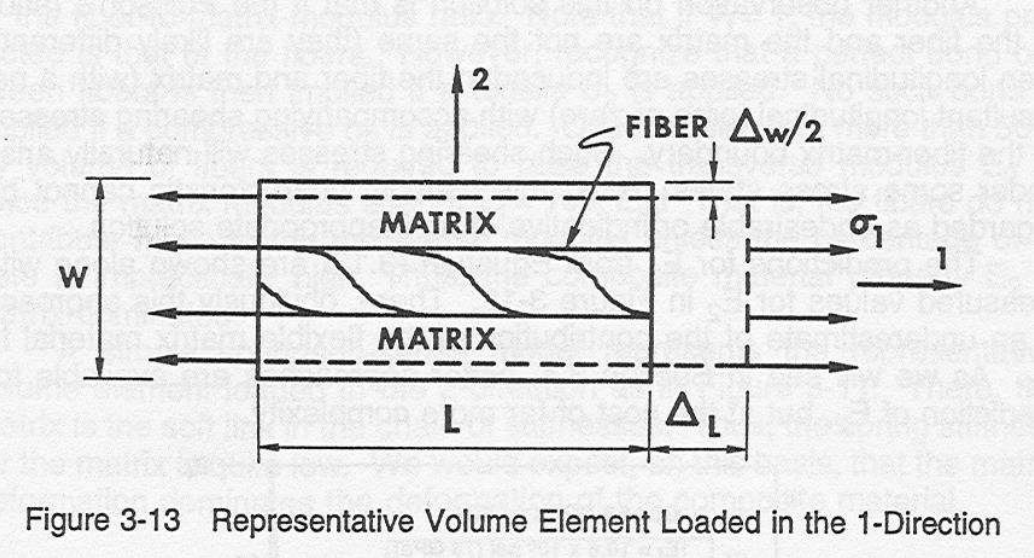


Figure 3-13 Representative Volume Element Loaded in the 1-Direction

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{m_1} = \varepsilon_{f_1}$$

$$\nu_m = -\frac{\varepsilon_{m_2}}{\varepsilon_{m_1}} = -\frac{\varepsilon_{m_2}}{\varepsilon_1}$$

$$\nu_f = -\frac{\varepsilon_{f_2}}{\varepsilon_{f_1}} = -\frac{\varepsilon_{f_2}}{\varepsilon_1}$$

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta W}{W}$$

$$\varepsilon_{f_2} = -\frac{\Delta W_f}{W_f}$$

$$\varepsilon_{m_2} = -\frac{\Delta W_m}{W_m}$$

$$\Delta W = -W\varepsilon_2 = W\nu_{12}\varepsilon_1$$

$$\Delta W_m = W_m \nu_m \varepsilon_1, \quad \Delta W_f = W_f \nu_f \varepsilon_1$$

$$\Delta W = \Delta W_m + \Delta W_f$$

6.9.2 ν_{12} teorik HESABI-devam

Theoritical calculation of ν_{12}

$$fiber\ hacim\ oranı:\ V_f = \frac{Fiber\ hacmi}{Kompozit\ Hacmi} = \frac{W_f L.t}{WW.L.t} = \frac{W_f}{W} \rightarrow \qquad W_f = V_f.W$$

$$matris\ hacim\ oranı:\ V_m = \frac{matris\ hacmi}{Kompozit\ Hacmi} = \frac{W_m L.t}{W.L.t} = \frac{W_m}{W} \rightarrow \qquad W_m = V_m.W$$

$$\Delta W = \Delta W_m + \Delta W_f$$

$$W.\nu_{12}.\varepsilon_1 = W_m.\nu_m.\varepsilon_1 + W_f.\nu_f.\varepsilon_1$$

$$W.\nu_{12}.\varepsilon_1 = V_m.W.\nu_m.\varepsilon_1 + V_f.W.\nu_f.\varepsilon_1$$

$$\boxed{\nu_{12} = \nu_m.V_m + \nu_f.V_f}$$

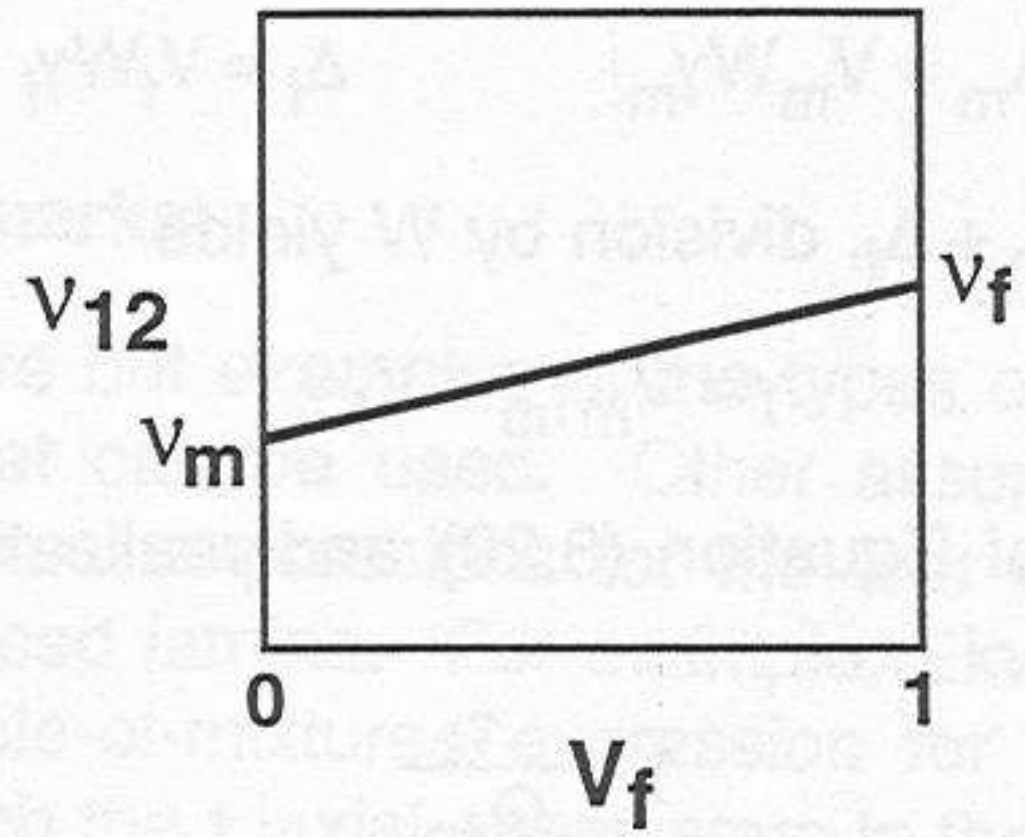


Figure 3-14 Variation of ν_{12} with Fiber-Volume Fraction

6.10 G_{12} teorik hesabı HESABI

Therotical Calculation of G_{12}

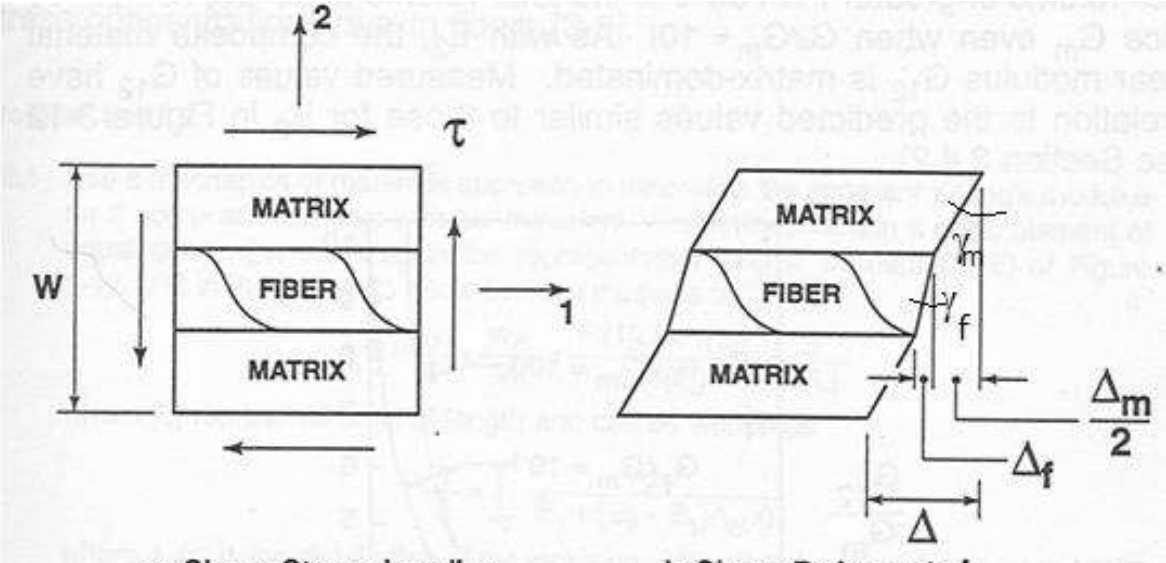


Figure 3-15 Representative Volume Element Loaded in Shear

On a microscopic scale, the deformations are shown in Figure 3-15. Note that the matrix deforms more than the fiber in shear because the matrix has a lower shear modulus. The total shearing deformation is

$$\Delta = \gamma W \qquad (3.21)$$

and is made up of, approximately, microscopic deformations

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{\Delta}{W} \Rightarrow \Delta = \gamma W \\ \gamma_m &= \frac{\Delta_m}{W_m} \Rightarrow \Delta_m = \gamma_m W_m \\ \gamma_f &= \frac{\Delta_f}{W_f} \Rightarrow \Delta_f = \gamma_f W_f \end{aligned}\right\rangle$$

$$\Delta = \Delta_f + \Delta_m$$

$$\gamma W = \gamma_m W_m + \gamma_f W_f$$

$$V_m = \frac{W_m}{W} \qquad V_f = \frac{W_f}{W}$$

$$\gamma = V_m \gamma_m + V_f \gamma_f$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}}$$

$$\frac{\tau}{G_{12}} = V_m \frac{\tau}{G_m} + V_f \frac{\tau}{G_f}$$

$$\boxed{\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}}$$

veya

$$G_{12} = \frac{G_m G_f}{V_m G_f + V_f G_m}$$

ÖRNEK 6.1
(EXAMPLE)

Cam fiberin (glass fiber)

Elastisite Modülü $E_f = 110$ GPa,

Poisson oranı ν_f =0.27;

Epoksinin (Epoxy)

Elastisite Modülü $E_m = 3.5$ GPa,

Poisson oranı ν_m = 0.3

olarak verildiğine göre, bunların birleştirilmesiyle elde edilecek olan Cam-Epoksi (glass fiber –epoxy) kompozitin elastik özelliklerini bulunuz. fiber hacim oranını (fiber volume firaction = V_f = 0.6)

E_1 = ? , E_2= ?, G_{12} = ? , ν_{12}=? ,